Wird weiter ergänzt

Gekoppelte Systeme

Übungsaufgaben

Datei Nr. 91132

Friedrich W. Buckel

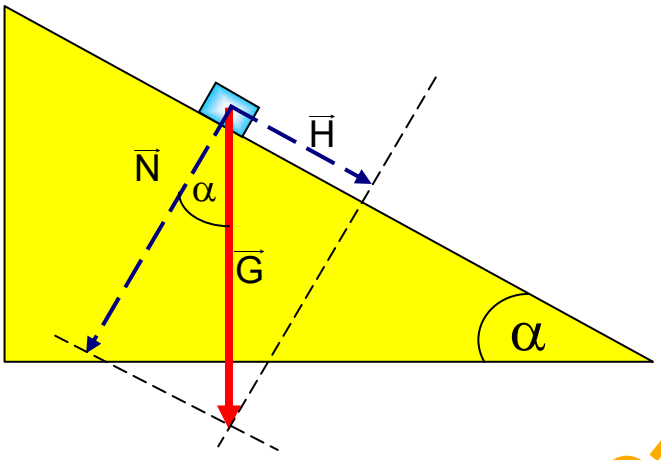
Stand: 3. Oktober 2021

Demo-Text für www.mathe-cd.de

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

1 Wiederholung: Kräfte auf einer schiefen Ebene



Auf einen Körper, der auf einer schiefen Ebene liegt (in Ruhe) oder in Bewegung ist, wirkt in der Regel nur die Erdanziehungskraft, also die Gravitationskraft, die sich uns als Gewichtskraft $\vec{G}$ (oder auch $\vec{F_G}$) äußert. Doch diese Kraft könnte nur dann in „ihrer" Richtung wirken, wenn darunter keine Unterlage wäre. Die schiefe Ebene verhindert dies und sorgt dafür, dass sich zwei andere Wirkungen herausbilden.

Zum einen ist eine Abwärtsbewegung möglich, zum anderen wird der Körper gegen die Unterlage gedrückt. Um die Größe dieser beiden Kraftwirkungen, die beide von der Gewichtskraft ausgehen, zu berechnen, zerlegt man die Gewichtskraft wie gezeigt in zwei Komponenten.

Die erste Komponente $\vec{H}$ heißt **Hangabtriebskraft**. Sie verursacht eine Bewegung abwärts (falls die bremsende Reibungskraft dies zulässt).

Die zweite Komponente $\vec{N}$ heißt **Normalkraft**. (Dieser Begriff kommt aus der Mathematik, wo „normal" auch „senkrecht" bedeuten kann). Die Normalkraft drückt den Körper senkrecht gegen die Unterlage, was die Reibung verursacht.

Der Neigungswinkel α der Ebene tritt bei der Zerlegung noch einmal auf.

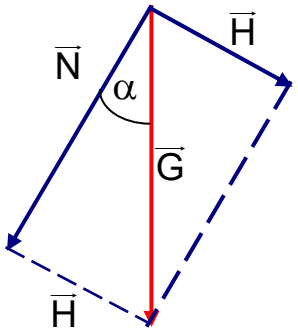
Das Kräfteparallelogramm wird zum Rechteck, so dass wir mit der Trigonometrie diese Formeln erhalten:

Hangabtriebskraft: $\boxed{\sin\alpha = \frac{H}{G} \Rightarrow H = G \cdot \sin\alpha}$

Normalkraft: $\boxed{\cos\alpha = \frac{N}{G} \Rightarrow N = G \cdot \cos\alpha}$

Reibungskraft: $\boxed{R = f \cdot N = f \cdot G \cdot \cos\alpha}$

Gewichtskraft: $\boxed{G = m \cdot g}$



mit $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

Zur Vereinfachung rechnet man oft mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabenblatt für Gekoppelte Systeme

1 Gegeben: m_1 = 5 kg, m_2 = 10 kg. $f' = 0{,}4$ und $f = 0{,}1$.

a) Setzt sich die Anordnung von selbst in Bewegung? Berechne die Beschleunigungskraft.

b) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das System nach 2 s? m_1 setzt in 80 cm Tiefe auf. Welche Geschwindigkeit hat m_1 in diesem Augenblick?

c) Nun wird m_2 verändert. Wie groß muss die Masse sein, damit sich die Anordnung nicht in Bewegung setzt?

2 (Zur Abbildung von 2.1.)

Die Massen m_1 und m_2 seien gleich groß. $f' = 0{,}4$ und $f = 0{,}1$.

Berechne die Beschleunigung, mit der sich die beiden Massen in Bewegung setzen.

m_1 setzt mit $v = 2{,}5\,\frac{m}{s}$ auf dem Boden auf. Wie groß war der Höhenunterschied?

Welche Kraft hat dabei das Seil von m_1 nach m_2 übertragen, wenn $m_{1,2}$ = 500 g ist?

Nachdem m_1 aufgesetzt hat, gleitet m_2 noch abgebremst weiter, wie weit und wie lange?

3 (zur Abb. von 4) mit diesen Daten: m_1 = 20 kg, $f = 0{,}1$, $\alpha = 40^o$

a) Das System legt aus der Ruhe heraus (ohne Haftreibung) in 5 Sekunden 8 Meter zurück. Berechne die Beschleunigung a und die Endgeschwindigkeit.

b) Berechne die Masse m_2.

c) Wie groß ist die Seilkraft?

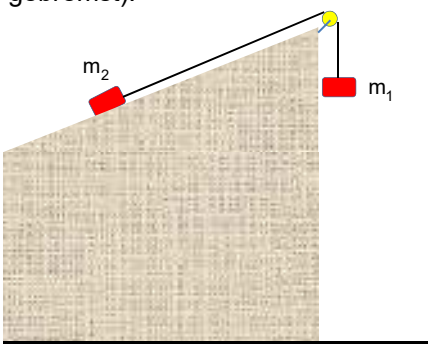
4 An Hand dieses Systems sollen verschiedene Optionen durchgerechnet werden.

Die Anordnung kann sich je nach Massengröße und Neigungswinkel nach rechts oder nach links bewegen. Berechne für beide Bewegungsrichtungen:

(1) Ob sich das System von selbst in Bewegung setzt

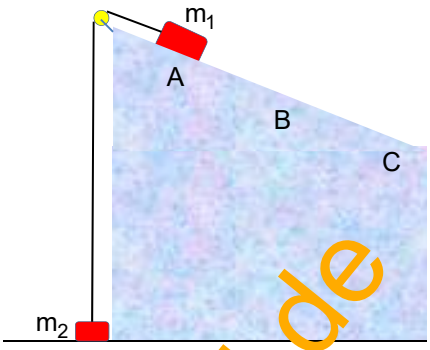
(2) Mit welcher Beschleunigung es nach einem Stoß (zur Überwindung der Haftreibung) in diese Richtung fährt (beschleunigt oder gebremst).

	m_1	m_2	f'	f	α
(a)	5 kg	8 kg	0,4	0,2	40°
(b)	5 kg	4 kg	0,4	0,2	50°
(c)	6 kg	6 kg	0,4	0,2	30°
(d)	1 kg	0,3 kg	0,4	0,2	20°



Demo-Text für www.mathe-cd.de

5 Ein Körper der Masse 500 g gleitet reibungsfrei eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α hinab. Er setzt sich bei A von selbst in Bewegung und benötigt für die 40 cm lange Strecke AC t_1 = 0,34s. (Der Körper m_2 ist noch nicht angekoppelt.)



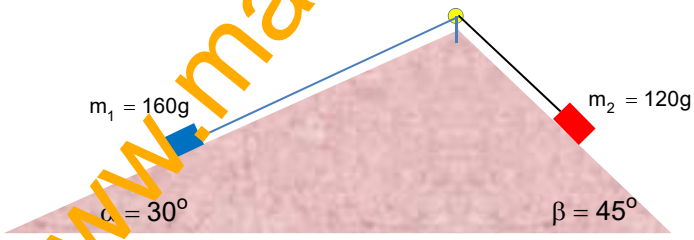
a) Berechne die Beschleunigung und die in C erreichte Geschwindigkeit.

b) Berechne den Neigungswinkel α.

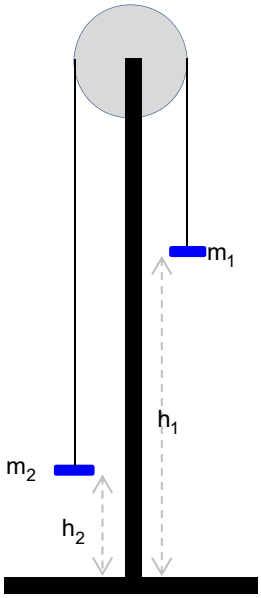
c) B sei genau die Mitte von AC. Wie lange gleitet der Köper von B nach C? Gib die Geschwindigkeitszunahme auf BC an.

d) Nun wird die Masse m_2 = 200 g angekoppelt. Daraufhin setzt sich m_1 in A erneut in Bewegung. Mit welcher Beschleunigung bewegt sich nun das System. Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit erreicht m_1 die Stelle C?

6 In nebenstehender Anordnung werden das Seil, die Rolle und die Reibung nicht beachtet. In welcher Richtung und mit welche Beschleunigung bewegt sich das System nach dem Loslassen? Welche Geschwindigkeit hat das System nach 10s erreicht, und welche Strecke haben die Körper dann zurückgelegt?



7. Nebenstehende Anordnung wird aus der Ruhe heraus losgelassen. Die Bewegung soll reibungsfrei und ohne Luftwiderstand verlaufen. Gegeben sind $m_1 = 300\,g$ und $m_2 = 200\,g$ sowie $h_1 = 1\,m$ und $h_2 = 40\,cm$. (Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu).



a) Nach dem Loslassen setz sicht das System in Bewegung. Mit welcher Geschwindigkeit setzt m_1 unten auf und wie lange hat das gedauert?

b) Danach bewegt sich m_2 ungekoppelt nach oben. Nach welcher Strecke hat m_2 den höchsten Punkt erreicht?

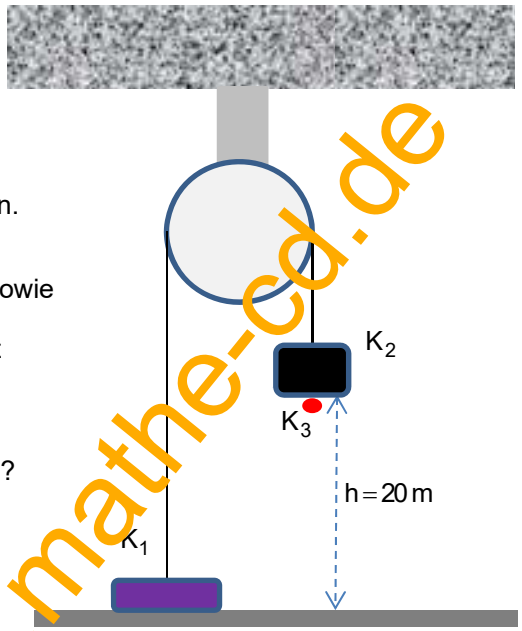
c) Danach bewegt sich m_2 wieder nach unten bis das Seil gespannt ist und sich m_1 mit einem Ruck nach oben in Bewegung setzt. Wie lange dauert diese 3. Phase des Ablaufs und wie schnell ist dann m_2 am Ende?

d) Nach dem Ruck bewegt sich das System noch eine Zeit gebremst nach links mit anfänglich $v_3 = 0{,}8\frac{m}{s}$. Mit welcher Geschwindigkeit trifft dann m_2 auf die Bodenplatte? Interpretiere das Ergebnis.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

8. (Reifeprüfung 1976 Baden-Württemberg)

An einem Seil, das über eine Rolle gelegt ist, hängen die Körper K_1 mit m_1 = 1,0 kg und K_2 mit m_2 = 1,5 kg.
Am unteren Ende von k_2 ist die Kugel K3 mit m_3 = 0,1 kg befestigt. Ihr Durchmesser soll vernachlässigt werden.
Die Abbildung zeigt die Anordnung bei Versuchsbeginn.



($g = 10\,\frac{m}{s^2}$, Luftwiderstand, Masse von Seil und Rolle sowie Reibung an der festen Rolle sollen nicht berücksichtigt werden.)

a) Wo befindet sich K_1 eine Sekunde nach dem Abheben?
Wie groß ist dann seine Geschwindigkeit?

b) Zum Zeitpunkt $t_1 = 1\,s$ löst sich K_3 von K_2 und beginnt zu fallen.
Wie groß ist für $t_2 = 2\,s$ die Geschwindigkeit von K_2?
Wie weit ist seine Unterkante von K_3 entfernt?

c) Nun wird der Versuch so geändert, dass K_3 sich bereits bei Versuchsbeginn von K_2 löst.
Die Kugel prallt dann vollelastisch auf dem Boden auf.
Berechne die Zeitspanne, die nach dem Aufprall vergeht, bis die Kugel gegen K_2 stößt.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Lösungen

1 Gegeben: $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 10$ kg. $f' = 0{,}4$ und $f = 0{,}1$.

a) Setzt sich die Anordnung von selbst in Bewegung? Berechne die Beschleunigungskraft.

Antriebskraft: $G_1 = 50\text{ N}$

Bremskraft: $R_2' = f \cdot G_2 = 0{,}4 \cdot 100\text{ N} = 40\text{ N}$

Weil $G_1 > R_2'$ setzt sic h das System von selbst in Bewegung.

b) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das System nach 2 s? m_1 setzt in 80 cm Tiefe auf. Welche Geschwindigkeit hat m_1 in diesem Augenblick?

Beschleunigende Kraft: $F = G_1 - R_2 = 50\text{ N} - 0{,}1 \cdot 100\text{ N} = 40\text{ N}$

Beschleunigung: $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} = \dfrac{40\text{ N}}{15\text{ kg}} \approx 2{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Für Bewegung aus der Ruhe heraus gilt: $v = a \cdot t = 2{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{s} = 5{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Nach s = 0,8 m: $v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 2{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}8} \approx 2{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Oder umständlich: $s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2s}{a}} = \sqrt{\dfrac{1{,}6\text{ m}}{2{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 0{,}78\text{ s}$

und damit $v = a \cdot t = 2{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}78\text{s} \approx 2{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) Nun wird m_2 verändert. Wie groß muss die Masse sein, damit sich die Anordnung nicht in Bewegung setzt?

Bedingung: $R_2' > G_1 \Leftrightarrow f' \cdot m_2 \cdot \cancel{g} > m_1 \cdot \cancel{g} \Leftrightarrow m_2 > \dfrac{m_1}{f'} \approx 12{,}5\text{ kg}$

Ergebnis: m_2 muss mindestens 2,5 kg haben, damit sich das System nicht in Bewegung setzt.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2 Die Massen m_1 und m_2 seien gleich groß. $f' = 0{,}4$ und $f = 0{,}1$. Berechne die Beschleunigung, mit der sich die beiden Massen in Bewegung setzen.

In Bewegung ist die Beschleunigungskraft

$$F = G_1 - R_2 = mg - fmg = mg(1-f)$$

Beschleunigung: $$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{mg(1-f)}{2m} = \frac{g \cdot 0{,}9}{2} = 4{,}5\,\frac{m}{s^2}$$

m_1 setzt mit $v = 2{,}5\,\frac{m}{s}$ auf dem Boden auf. Wie groß war der Höhnunterschied?

Diese Bewegung startet aus der Ruhe heraus, also gilt:

$$v = \sqrt{2as} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2}{2a} = \frac{6{,}25\,\frac{m^2}{s^2}}{9\,\frac{m}{s^2}} \approx 0{,}69\,m$$

Welche Kraft hat dabei das Seil von m_1 nach m_2 übertragen, wenn $m_{1,2} = 500$ g ist?

Die Gewichtskraft beschleunigt m_1 und m_2 und überwindet die Gleitreibungskraft.

$$G_1 = \underbrace{m_1 \cdot a}_{\text{für } m_1} + \underbrace{m_2 \cdot a + f \cdot m_2 \cdot g}_{\text{Übertragung auf } m_2}$$

Die Seilkraft ist also $$F_S = G_1 - m_1 \cdot a = 5\,N - 0{,}5\,kg \cdot 4{,}5\,\frac{m}{s^2} = 2{,}75\,N$$

Oder so berechnet: $$F_S = m_2 \cdot a + f \cdot m_2 \cdot g = 0{,}5\,kg \cdot 4{,}5\,\frac{m}{s^2} + 0{,}1 \cdot 5\,N = 2{,}75\,N$$

Nachdem m_1 aufgesetzt hat, gleitet m_2 noch abgebremst weiter, wie weit und wie lange?

Nach 0,69 m gleitet m_2 alleine weiter und wird dabei von $R' = f \cdot G = 0{,}1 \cdot 5\,N = 0{,}5\,N$ Berechnet man das Bremsen bis zum Halten über die umgekehrte Bewegung aus der Ruhe heraus, dann kann man mit $v = \sqrt{2as}$ rechnen,

wobei die Bremsverzögerung $a = \frac{0{,}5\,N}{0{,}5\,kg} = 1\,\frac{m}{s^2}$ ist. $$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{2{,}5\,\frac{m^2}{s^2}}{2\,\frac{m}{s^2}} = 1{,}25\,m$$

Die Zeitspanne ist: $$t = \frac{v}{a} = \frac{2{,}5\,\frac{m}{s}}{1\,\frac{m}{s^2}} = 1{,}5\,s\,.$$

Dies alles unter der Voraussetzung, dass m_2 noch so viel Weg zum Gleiten zur Verfügung hat.

Demo-Text für www.mathe-cd.de